第27卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 5
2010年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0833-05

矩阵方程 $X = Q - A^*(I_m \otimes X - C)^{-1}A$ 的正定解*

姚国柱[1]， 廖安平[2,3]， 段雪峰[4]

(1- 长沙理工大学数学与计算科学学院，长沙 410114;
2- 湖南大学数学与计量经济学院，长沙 410082;
3- 长沙学院数学研究所，长沙 410003;
4- 桂林电子科技大学数学与计算科学学院，桂林 541004)

摘 要: 本文利用Kronecker积的性质，得到了非线性矩阵方程 $X = Q - A^*(I_m \otimes X - C)^{-1}A$ 存在正定解的充分必要条件。运用有界序列的收敛原理，给出了求解方程的不动点迭代与无逆迭代两种迭代方法。数值例子验证了这两种迭代方法是行之有效的。

关键词: 非线性矩阵方程；正定解；不动点迭代；无逆迭代

分类号: **AMS**(2000) 15A24; 65H05 **中图分类号**: O241.7 **文献标识码**: A

1 引言

本文研究非线性矩阵方程

$$X = Q - A^*\left(I_m \otimes X - C\right)^{-1}A, \tag{1}$$

在矩阵集合 $X \in \varphi(n) = \{X \mid I_m \otimes X > C\}$ 内的正定解，其中 Q 是 n 阶正定矩阵，C 是 mn 阶半正定矩阵，且 $I_m \otimes Q - C > 0$，A 是 $mn \times n$ 阶复矩阵。形如 (1) 的非线性矩阵方程在控制理论、梯形网络、动态规划、统计学等领域中有广泛的应用[1-6].

2 矩阵方程 (1) 有解的条件

方程 (1) 等价于

$$I_m \otimes X + (I_m \otimes A^*)\left[I_m \otimes (I_m \otimes X - C)^{-1}\right](I_m \otimes A) = I_m \otimes Q.$$

令

$$Y = I_m \otimes X - C, \quad \bar{Q} = I_m \otimes Q - C > 0, \quad \bar{A} = I_m \otimes A,$$

则方程 (1) 可转化为

$$Y + \bar{A}^*\left(I_m \otimes Y^{-1}\right)\bar{A} = \bar{Q}. \tag{2}$$

将 $\bar{A} = I_m \otimes A$ 分块为

$$\bar{A} = \left(A_1{}^T, A_2{}^T, \cdots, A_m{}^T\right)^T,$$

收稿日期: 2008-12-02. **作者简介**: 姚国柱 (1974年9月生)，男，博士，讲师. 研究方向：数值代数.
***基金项目**: 湖南省自然科学基金 (09JJ6012).

其中 $A_i = {e_i}^T \otimes A$, $i = 1, 2, \cdots, m$，再令

$$\bar{Y} = \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} Y \bar{Q}^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{A}_i = \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} A_i \bar{Q}^{-\frac{1}{2}},$$

则方程 (2) 又可转化为

$$\bar{Y} + \sum_{i=1}^{m} \bar{A}_i^* \bar{Y}^{-1} \bar{A}_i = I_{mn}. \tag{3}$$

引理 2.1 方程 (1) 有解等价于方程 (3) 有解。

引理 2.2[5] 方程 (3) 有解的充分必要条件是 $\bar{A}_i$ 有以下分解

$$\bar{A}_i = \bar{W}^* \bar{Z}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{4}$$

其中 $\bar{W}$ 是非奇异矩阵且 $(\bar{W}^T, \bar{Z}_1^T, \cdots, \bar{Z}_m^T)^T$ 是列正交的。在此条件下，$\bar{Y} = \bar{W}^* \bar{W}$ 是方程 (3) 的解。

定理 2.1 方程 (1) 有解的充分必要条件是 A 有分解 $A = W^* Z$，其中 W 是非奇异矩阵且有

$$W^* W + I_m \otimes (Z^* Z) = \bar{Q}. \tag{5}$$

在此条件下，$X = Q - Z^* Z$ 是方程 (1) 的解。

证明 必要性：设方程 (3) 有解 $\bar{Y}$。由引理 2.2 可知，$\bar{A}_i$ 有分解式 (4)，且有

$$\left(\bar{W}^*, \bar{Z}_1^*, \cdots, \bar{Z}_m^*\right)\left(\bar{W}^T, \bar{Z}_1^T, \cdots, \bar{Z}_m^T\right)^T = I_{mn},$$

又 $\bar{A}_i = \bar{Q}^{-\frac{1}{2}}({e_i}^T \otimes A)\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}$，即

$${e_i}^T \otimes A = \bar{Q}^{\frac{1}{2}} \bar{W}^* \bar{Z}_i \bar{Q}^{\frac{1}{2}} = \left(\bar{W} \bar{Q}^{\frac{1}{2}}\right)^* \bar{Z}_i \bar{Q}^{\frac{1}{2}}.$$

令 $W = \bar{W}\bar{Q}^{\frac{1}{2}}$，由 $\bar{W}$ 非奇异知 W 非奇异。且有

$$W^{-*}\left({e_i}^T \otimes A\right) = {e_i}^T \otimes (W^{-*} A) = \bar{Z}_i \bar{Q}^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

将 (6) 式的右边 $\bar{Z}_i \bar{Q}^{\frac{1}{2}}$ 分成与 (6) 式中间相同的 $1 \times m$ 块形式，设其中第 i 块为 Z_i，则由 (6) 式得

$$\bar{Z}_i \bar{Q}^{\frac{1}{2}} = {e_i}^T \otimes Z_i = {e_i}^T \otimes (W^{-*} A),$$

即 $Z_i = W^{-*} A$, $i = 1, 2, \cdots, m$，不妨设 $W^{-*} A = Z$。于是 $A = W^* Z$, $\bar{Z}_i = ({e_i}^T \otimes Z)\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}$，结合 $\bar{W} = W \bar{Q}^{-\frac{1}{2}}$ 有

$$\begin{aligned}
&\bar{Q}^{-\frac{1}{2}} W^* W \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{m} \left[\bar{Q}^{-\frac{1}{2}} (e_i \otimes Z^*)({e_i}^T \otimes Z)\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}\right] \\
=\ & \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} W^* W \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} + \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{m} (e_i {e_i}^T) \otimes (Z^* Z)\right] \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \\
=\ & \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left[W^* W + \left(\sum_{i=1}^{m} e_i {e_i}^T\right) \otimes (Z^* Z)\right] \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \\
=\ & \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} \left[W^* W + I_m \otimes (Z^* Z)\right] \bar{Q}^{-\frac{1}{2}} = I_{mn},
\end{aligned}$$

即有 $W^*W + I_m \otimes (Z^*Z) = \bar{Q}$ 成立。

充分性：若 $A = W^*Z$，W 非奇异，且条件 (5) 成立，则

$$\bar{A}_i = \bar{Q}^{-\frac{1}{2}}(e_i{}^T \otimes A)\bar{Q}^{-\frac{1}{2}} = \bar{Q}^{-\frac{1}{2}}\left[e_i{}^T \otimes (W^*Z)\right]\bar{Q}^{-\frac{1}{2}} = \bar{Q}^{-\frac{1}{2}}W^*\left(e_i{}^T \otimes Z\right)\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}.$$

令 $\bar{W} = W\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}$，$\bar{Z}_i = (e_i{}^T \otimes Z)\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}$，则 $\bar{A}_i = \bar{W}^*\bar{Z}_i$，$\bar{W}$ 非奇异。结合条件 (5) 不难验证

$$\bar{W}^*\bar{W} + \sum_{i=1}^{m}\bar{Z}_i^*\bar{Z}_i = I_{mn},$$

即 $(\bar{W}^T, \bar{Z}_1^T, \cdots, \bar{Z}_m^T)^T$ 是列正交的。由引理 2.1 可知，方程 (3) 有解，从而方程 (1) 有解，且 $\bar{Y} = \bar{W}^*\bar{W} = \bar{Q}^{-\frac{1}{2}}W^*W\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}$ 是方程 (3) 的一个解。又 $Y = \bar{Q}^{\frac{1}{2}}\bar{Y}\bar{Q}^{\frac{1}{2}} = W^*W$，代入方程 (1) 得

$$X = Q - A^*Y^{-1}A = Q - A^*W^{-1}W^{-*}A = Q - Z^*Z.$$

3 求解矩阵方程 (1) 的数值方法

为行文方便，下文用 $\hat{X}$ 表示 $I_m \otimes X$。

算法 3.1

$$\begin{cases} X_0 = Q, \\ X_{n+1} = Q - A^*(\hat{X}_n - C)^{-1}A, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

为了讨论算法 3.1 的收敛性，首先给出如下引理：

引理 3.1 设 X 为矩阵方程 (1) 在 $\varphi(n) = \{X \mid \hat{X} > C\}$ 内的任意解，则 $X \le Q$。

引理 3.2[4] 如果 $A \ge B > 0$，则当 $\alpha \in (0, 1]$ 时，有 $A^\alpha \ge B^\alpha > 0$；当 $\alpha \in [-1, 0)$ 时，有 $B^\alpha \ge A^\alpha > 0$。

定理 3.1 设 $X \in \varphi(n)$ 为方程 (1) 的任意解，则由算法 3.1 得到的序列 $\{X_n\}$ 收敛到方程 (1) 在 $\varphi(n)$ 内的极大解 X_L。

证明 采用归纳法可证序列 $\{X_n\}$ 有下界 X 且序列 $\{X_n\}$ 单调递减，故 $\{X_n\}$ 收敛。又 X 是方程 (1) 在 $\varphi(n)$ 内的任意解，因此 $\{X_n\}$ 收敛到方程 (1) 在 $\varphi(n)$ 内的极大解 X_L。

下面，我们给出求解矩阵方程 (1) 的无逆迭代算法。不失一般性，下文我们假定方程 (1) 中 $Q = I_n$，则条件 $\hat{Q} > C$ 变成 $\hat{I}_n > C$。

算法 3.2

$$\begin{cases} X_0 = I_n, \quad Y_0 = (\hat{I}_n - C)^{-1}, \\ X_{k+1} = I_n - A^*Y_kA, \\ Y_{k+1} = Y_k[2\hat{I}_n - (\hat{X}_k - C)Y_k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

定理 3.2 设 $X_n, Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ 是由算法 3.2 产生的迭代序列。若方程 (1) 有一个解 $X \in \varphi(n)$，则方程 (1) 在 $\varphi(n)$ 内存在最大解 X_L，且 $\{X_n\}$ 单调递减收敛到 X_L。

证明 此定理证明类似于文献 [3] 中定理 3.3，故略去。

4 数值例子

我们先来考虑算法3.1与算法3.2的计算复杂度。不妨假设所有的矩阵都是实的。对于算法3.1中的矩阵求逆运算，一般采用Cholesky分解，即$\hat{X}_n - C = LL^T$，然后再求解三角形矩阵方程$LB = A$，最后计算$X_{n+1} = Q - B^TB$。容易得到算法3.1每迭代一步需要

$$\frac{(mn)^3}{3} + m^2n^3 + mn^3$$

个flops，计算中用到了矩阵的对称性。类似地，可以知道算法3.2每迭代一步需要$3(mn)^3 + 2m^2n^3 + mn^3$个flops。不难看出，虽然算法3.2避免了矩阵的求逆运算，但是其每迭代步计算所需flops比算法3.1要多。

下面用数值例子来验证算法3.1与算法3.2。以下所有结果都是在Matlab 7.0中运行得到的。

例1 考虑矩阵方程

$$X = Q - A^*\left(I_m \otimes X - C\right)^{-1}A, \tag{7}$$

其中

$$m = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.1 & 32 \\ 5 & 6 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 244 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若用算法3.1求解方程(7)，经24步迭代后得到方程(7)的极大解

$$X \approx X_{24} = \begin{pmatrix} 10.4901 & 5.9473 \\ 5.9473 & 235.9229 \end{pmatrix},$$

经计算，残差

$$\left\|R(X_{24})\right\|_F = \left\|X_{24} - Q + A^*(I_m \otimes X_{24} - C)^{-1}A\right\|_F = 7.0072 \times 10^{-15}.$$

若用算法3.2求解方程(7)，经49步迭代后得到方程(7)的极大解

$$X \approx X_{49} = \begin{pmatrix} 10.4901 & 5.9473 \\ 5.9473 & 235.9229 \end{pmatrix},$$

经计算，残差

$$\left\|R(X_{49})\right\|_F = \left\|X_{49} - Q + A^*(I_m \otimes X_{49} - C)^{-1}A\right\|_F = 6.7875 \times 10^{-15}.$$

由例1可知，用算法3.1和算法3.2求解矩阵方程(1)是可行的，而且也是有效的。

参考文献：

[1] Ran A C M, Reurings M C B. A nonlinear matrix equation connected to interpolation[J]. Linear Algebra and its Applications, 2004, 379: 289-302

[2] Duan X F, Liao A P, Tang B. On the nonlinear matrix equation $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^* X^{\delta_i} A_i = Q$[J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 429: 110-121

[3] Zhan X Z. Computing the extremal positive definite solutions of a matrix equation[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1996, 17: 337-345

[4] Zhan X Z. Matrix Inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002

[5] 龙建辉. 求解几类非线性矩阵方程的数值算法[D]. 湖南大学博士论文，2008
Long J H. Numerical algorithms for several kinds of nonlinear matrix equations[D]. The Doctorial Dissertation of Hunan University, 2008

[6] 李静，张玉海. 矩阵方程 $X - A^* X^{-q} A = Q\,(q > 1)$ 的 Hermite 正定解[J]. 工程数学学报，2005, 22(4): 679-686
Li J, Zhang Y H. The Hermite positive definite solution of matrix equation $X - A^* X^{-q} A = Q\,(q > 1)$[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(4): 679-686

Positive Definite Solutions of the Matrix Equation $X = Q - A^*(I_m \otimes X - C)^{-1}A$

YAO Guo-zhu[1] LIAO An-ping[2,3] DUAN Xue-feng[4]

(1- College of Mathematics and Computing Science, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114; 2- College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082; 3- Institute of Mathematics, Changsha University, Changsha 410003; 4- School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004)

Abstract: The nonlinear matrix equation $X = Q - A^*(I_m \otimes X - C)^{-1}A$ is considered in this paper. A sufficient and necessary condition for the existence of positive definite solutions to this equation is presented by using properties of the Kronecker product. Two iterative methods for solving the equation are constructed by making use of the principle for the bounded sequence. The feasibility and effectiveness of the iterative methods are verified by a numerical example.

Keywords: nonlinear matrix equation; positive definite solution; fixed point iteration; inverse-free iteration

Received: 02 Dec 2008. **Accepted:** 31 Dec 2009.

Foundation item: The Natural Science Foundation of Hunan Province (09JJ6012).